

MÔN LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

Giảng viên: ThS. Mai Chiém Tuấn

E-mail: maichiemtuangmail.com

ĐT: 0933567479

CHƯƠNG IV

ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

Chương IV: ĐỒ THỊ EULER VÀ HAMILTON



1

IV.1 Đồ thị Euler

2

IV.2 Đồ thị Hamilton

3

IV.3 Bài toán người đưa thư

4

IV.4 Bài toán người du lịch

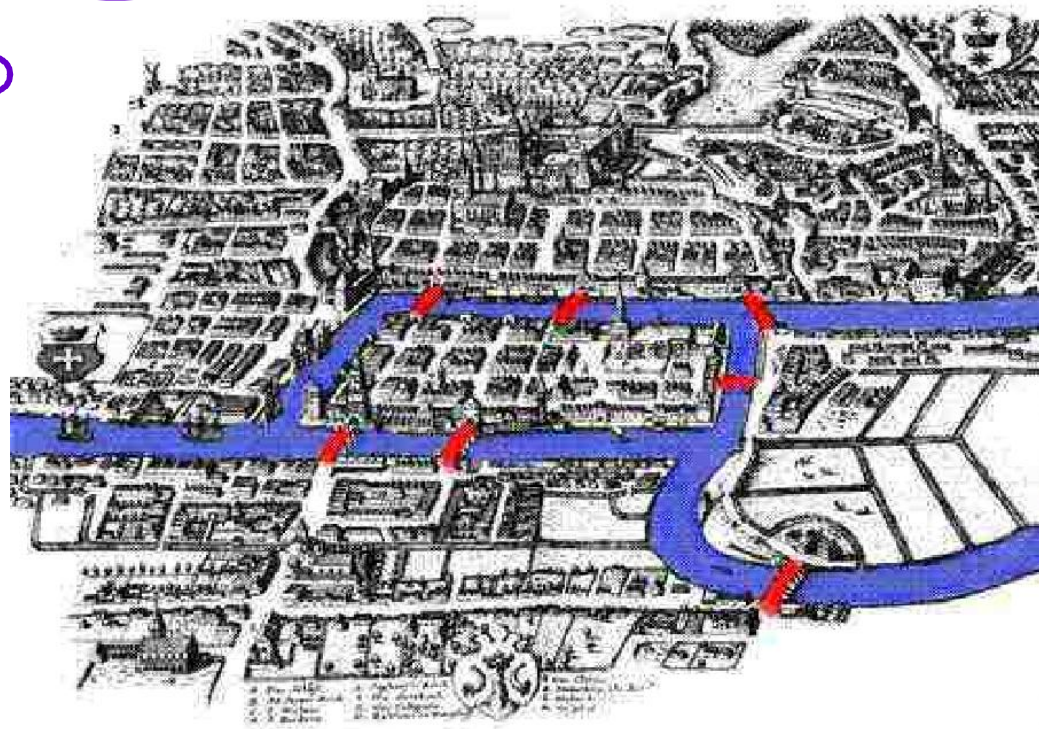
5

IV.5 Bài tập

Konigsberg,
Hmmm

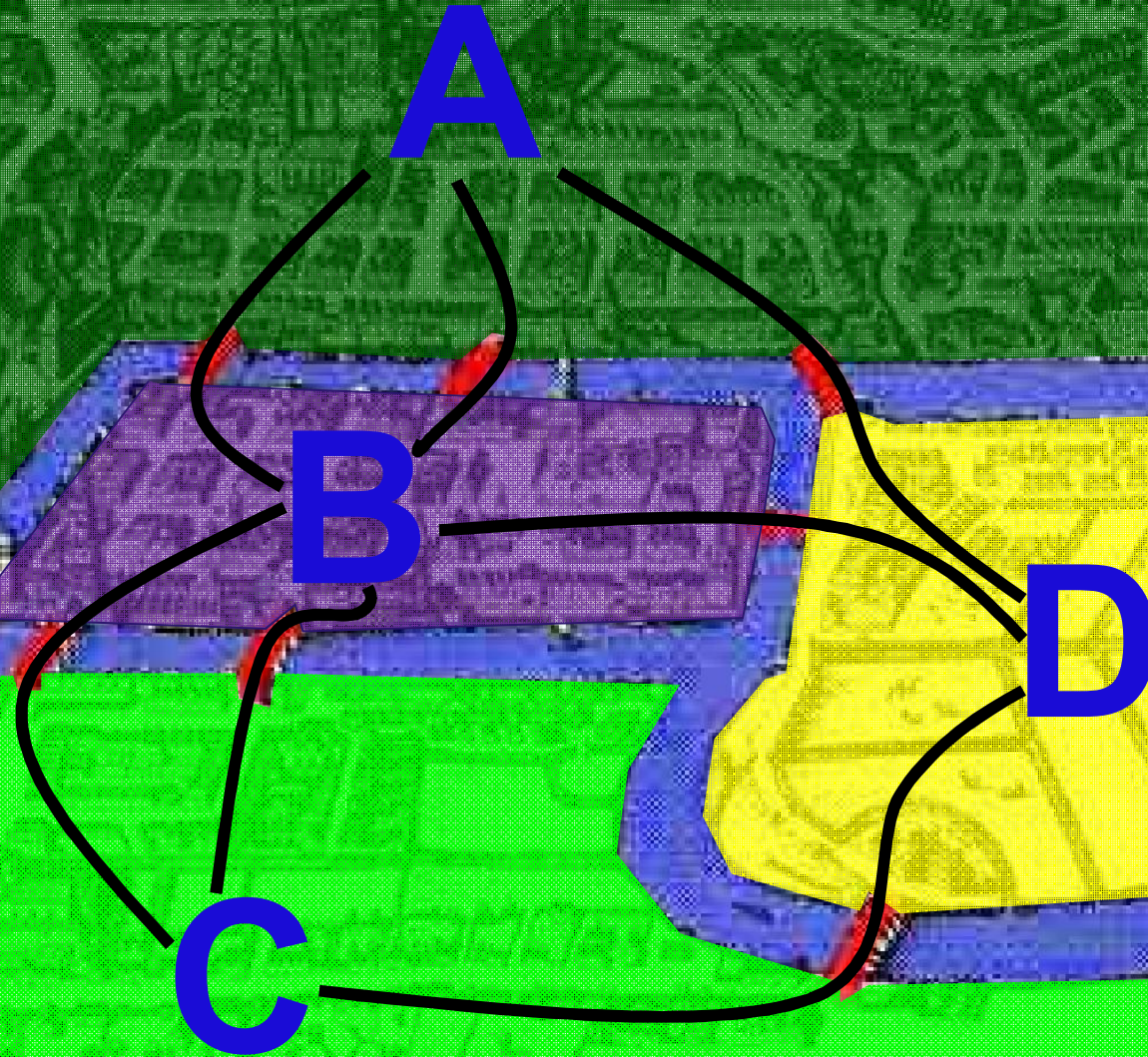


Leonhard Euler
(1707 – 1783)

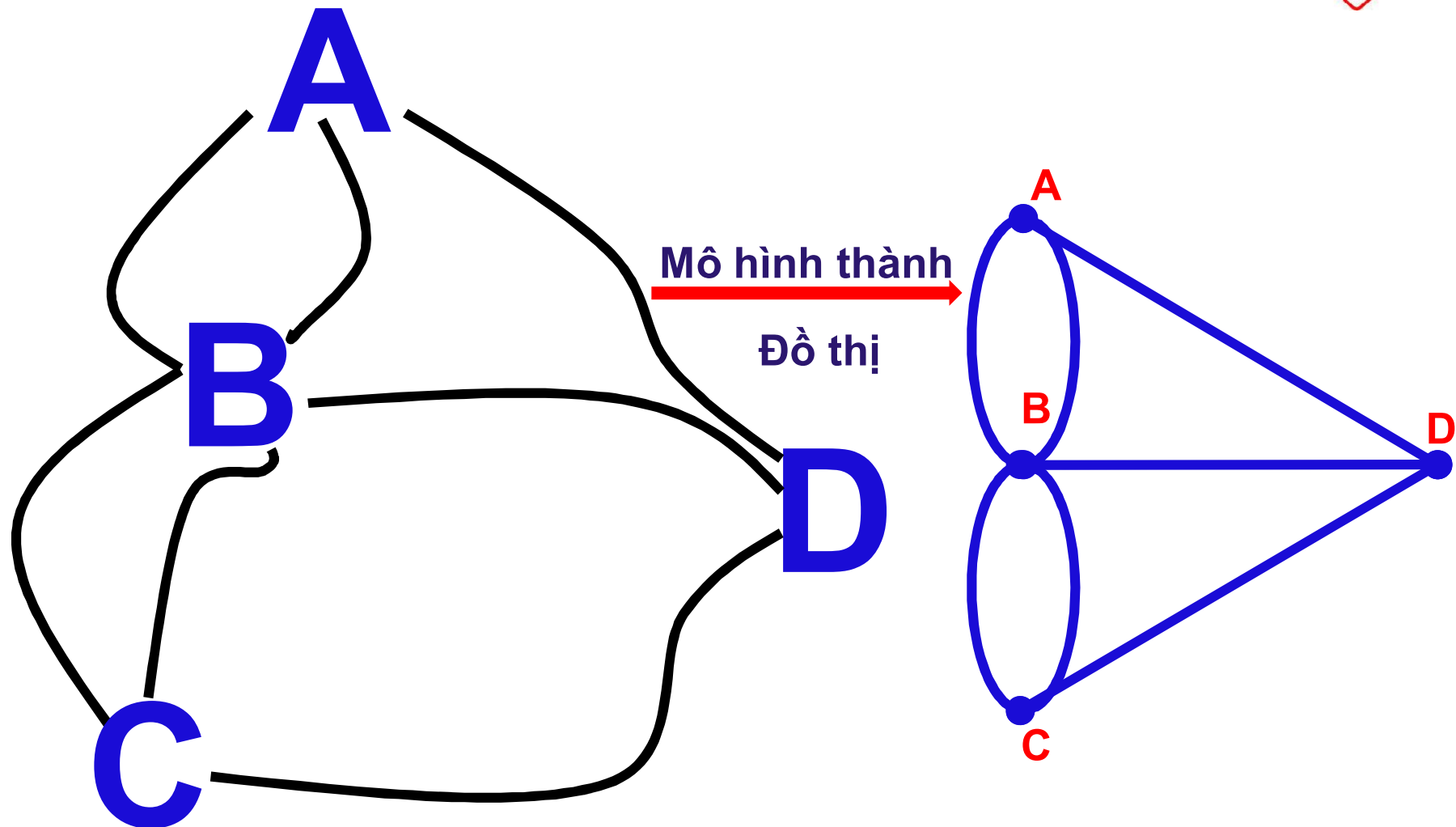


ĐỒ THỊ EULER

Bài toán 7 cái cầu ở TP Königsberg



Bài toán 7 cái cầu ở Tp. Königsberg

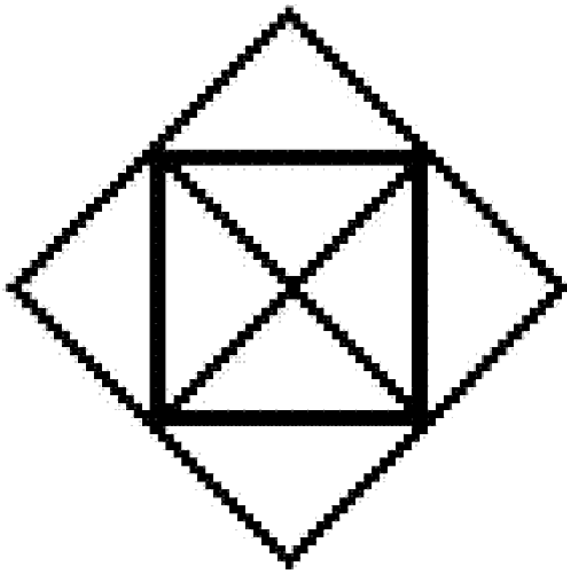


IV.1 Đồ thị Euler

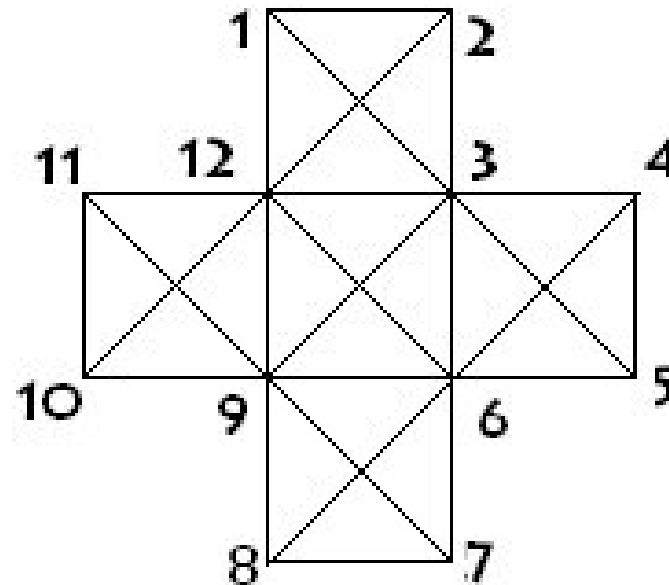


Giới thiệu

- ❖ Hãy vẽ các hình sau bằng đúng một nét bút (không được nhấc bút lên trong khi vẽ)



**Không vẽ được bằng 1 nét.
Tối thiểu phải vẽ bằng 2 nét.**



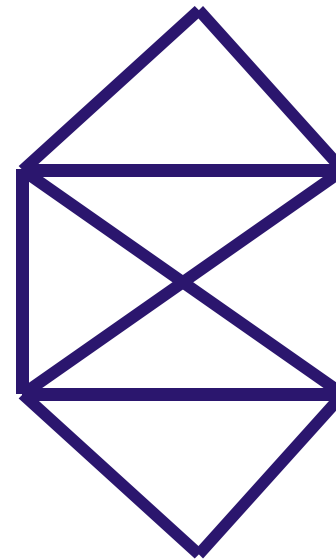
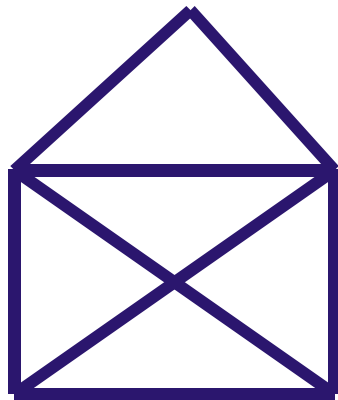
**Không vẽ được bằng 1 nét.
Tối thiểu phải vẽ bằng 6 nét.**

IV.1 Đồ thị Euler



Giới thiệu

- ❖ Hãy vẽ các hình sau bằng đúng một nét bút (không được nhấc bút lên trong khi vẽ)



IV.1 Đồ thị Euler



Định nghĩa 4.1

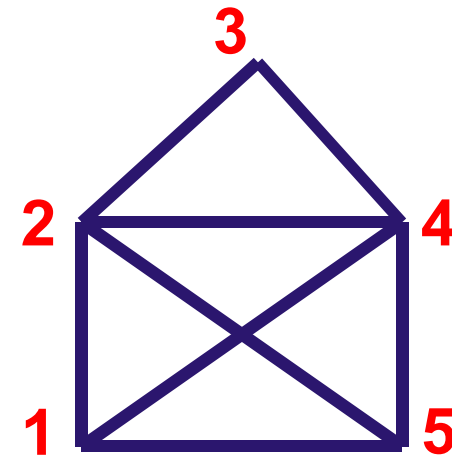
❖ Xét đồ thị $G = \langle V, E \rangle$:

- Một đường đi trên đồ thị được gọi là **đường đi Euler** nếu nó đi qua **tất cả các cạnh**, mỗi cạnh một lần.
- Một chu trình trên đồ thị được gọi là **chu trình Euler** nếu nó đi qua **tất cả các cạnh**, mỗi cạnh một lần.

Ví dụ 5.1: Đồ thị sau có các **đường đi Euler** là:

d_1 : 1 2 3 4 2 5 4 1 5

d_2 : 1 2 4 3 2 5 1 4 5

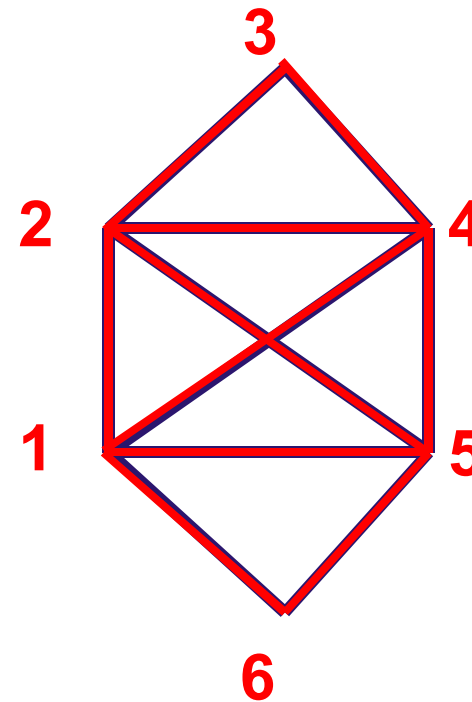


IV.1 Đồ thị Euler



❖ Ví dụ 4.2: Đồ thị sau có các chu trình Euler là:

- C_1 : 1 2 3 4 2 5 4 1 5 6 1
- C_2 : 1 2 4 3 2 5 1 4 5 6 1



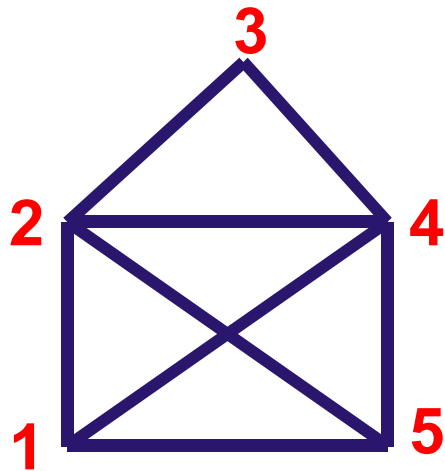
IV.1 Đồ thị Euler



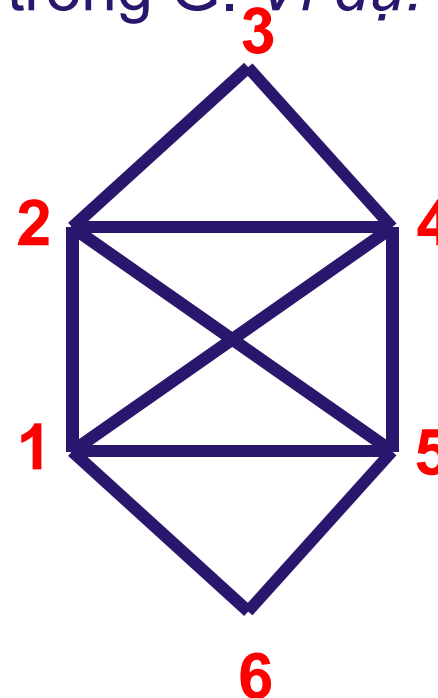
Định nghĩa 4.2

❖ Xét đồ thị $G = \langle V, E \rangle$.

- Đồ thị G được gọi là **đồ thị Euler** nếu và chỉ nếu tồn tại **một chu trình Euler** trong G .
- Đồ thị G được gọi là **đồ thị nửa Euler** nếu và chỉ nếu tồn tại **một đường đi Euler** trong G . Ví dụ: 4.3



Đồ thị nửa Euler

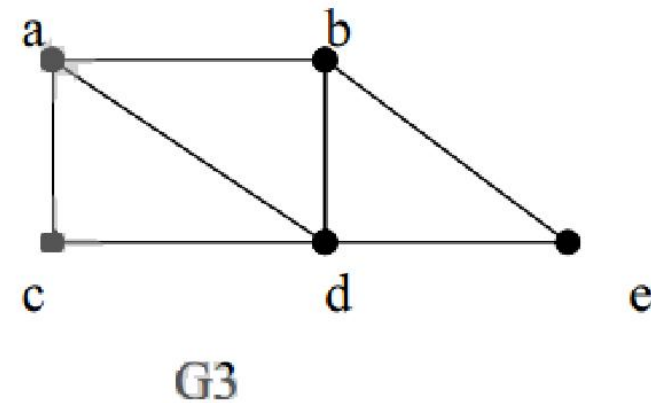
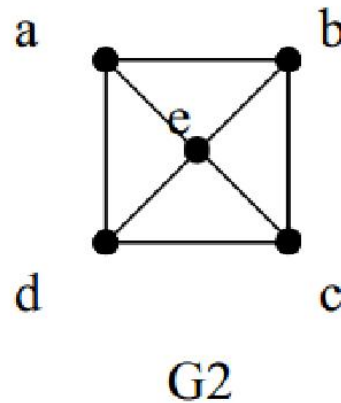
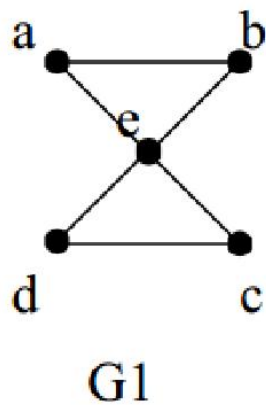


Đồ thị Euler
(hiển nhiên
cũng là đồ thị
nửa Euler).

IV.1 Đồ thị Euler



❖ Ví dụ 5.4: Xét đồ thị $G1$, $G2$, $G3$ sau:

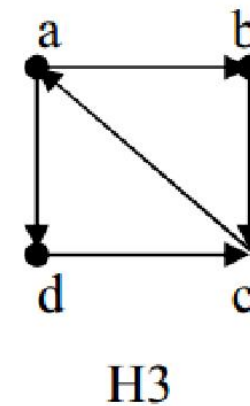
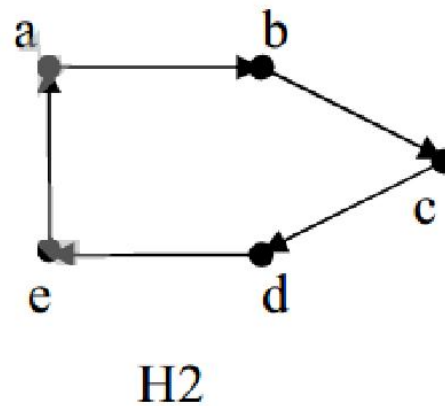
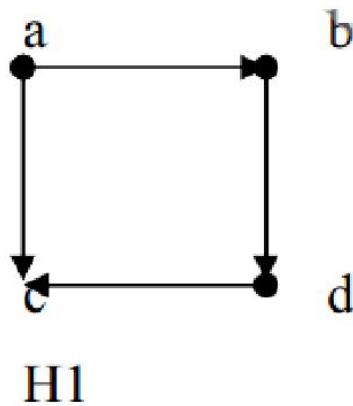


- ❖ $G1$: Là đồ thị Euler vì có chu trình Euler a, e, c, d, e, b, a .
- ❖ $G3$: Là đồ thị nửa Euler, vì không có chu trình Euler, nhưng có đường đi Euler a, c, d, e, b, d, a, b .
- ❖ $G2$: không có chu trình Euler cũng như đường đi Euler.

IV.1 Đồ thị Euler



❖ Ví dụ 4.5: Xét đồ thị H1, H2, H3 sau:



- ❖ H1: không có chu trình Euler cũng như đường đi Euler.
- ❖ H2: Là đồ thị Euler vì có chu trình Euler a, b, c, d, e, a .
- ❖ H3: Là đồ thị nửa Euler, vì không có chu trình Euler, nhưng có đường đi Euler a, b, c, a, d, c .

IV.1 Đồ thị Euler

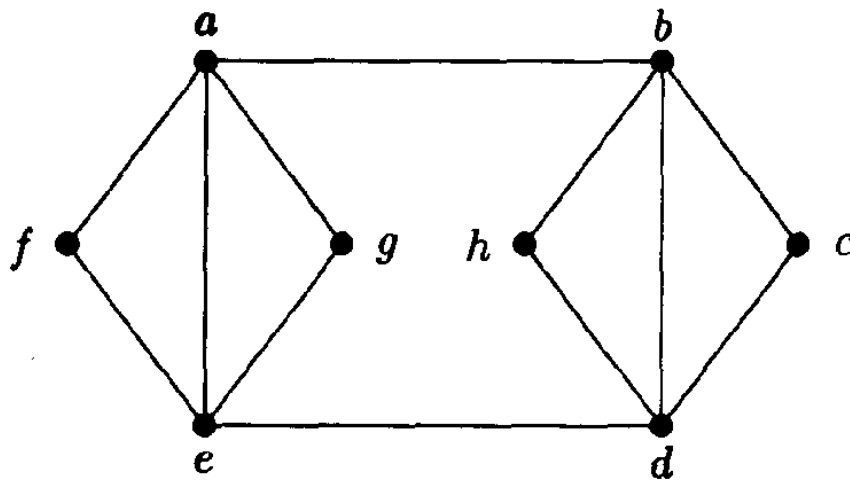


Định lý 4.1

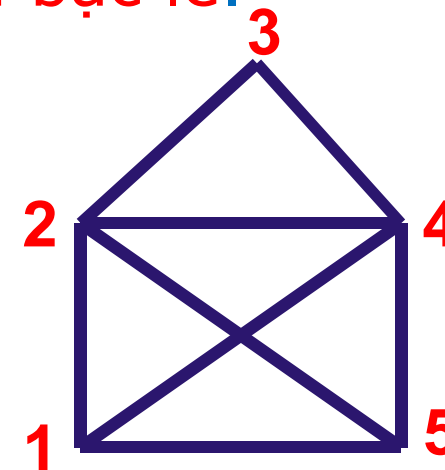
- ❖ Đồ thị vô hướng liên thông $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.

Hệ quả

- ❖ Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.



Đồ thị Euler



Đồ thị nửa Euler

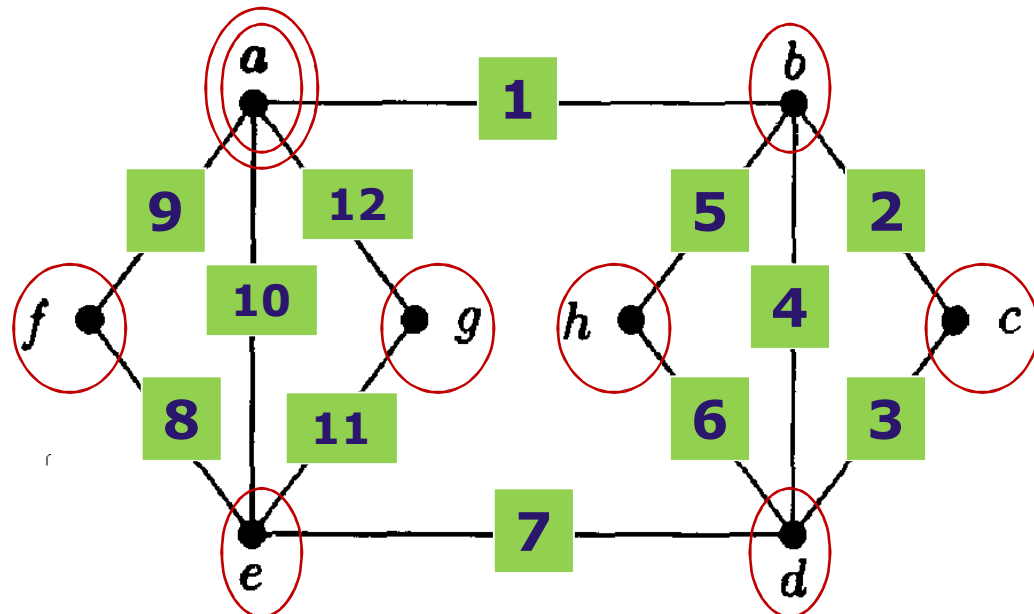
IV.1 Đồ thị Euler



Thuật toán Flor tìm chu trình Euler

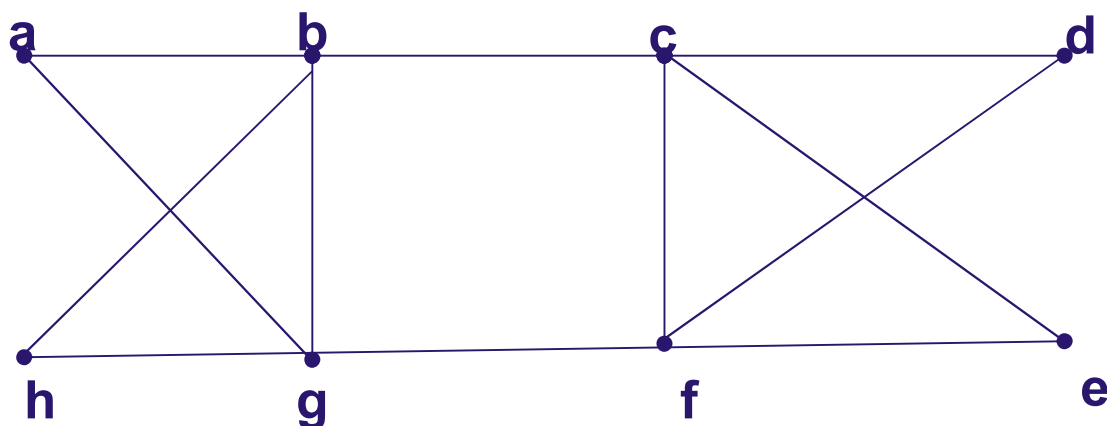
- ❖ Bắt đầu từ một đỉnh bất kỳ của đồ thị và tuân theo các quy tắc sau:
 - **Quy tắc 1.** Khi đi qua một cạnh nào đó thì **xóa nó đi** và **xóa luôn đỉnh cô lập**, nếu có.
 - **Quy tắc 2.** Không bao giờ đi qua cầu (cạnh cắt) trừ phi không còn cách nào khác.

❖ Ví dụ 4.6





❖ Ví Dụ 4.7: Tìm chu trình Euler trong đồ thị sau:



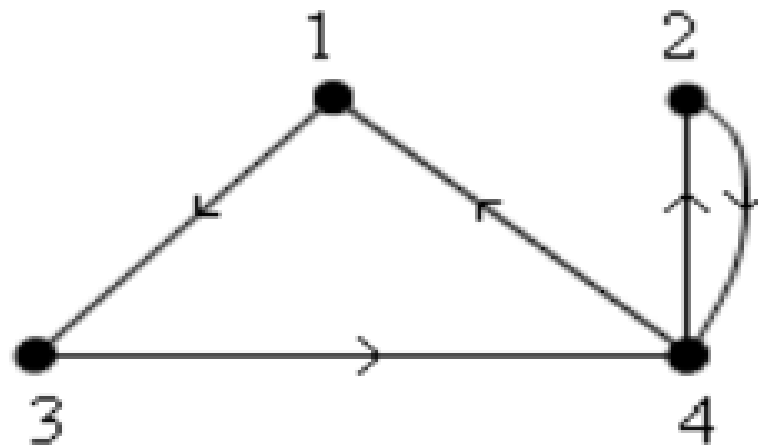
❖ CE: b, c, d, f, e, c, f, g, a, b, h, g, b.

IV.1 Đồ thị Euler

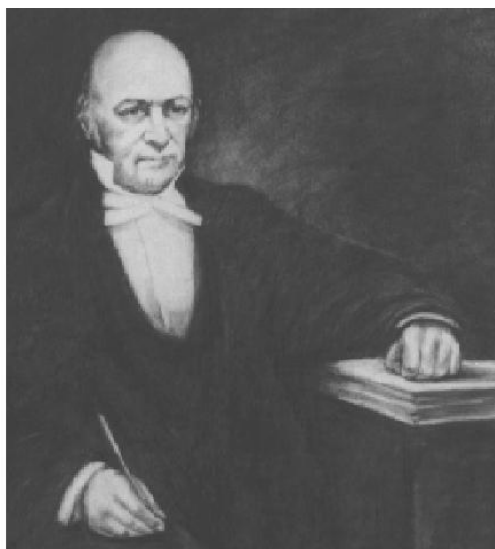


Định lý 4.2

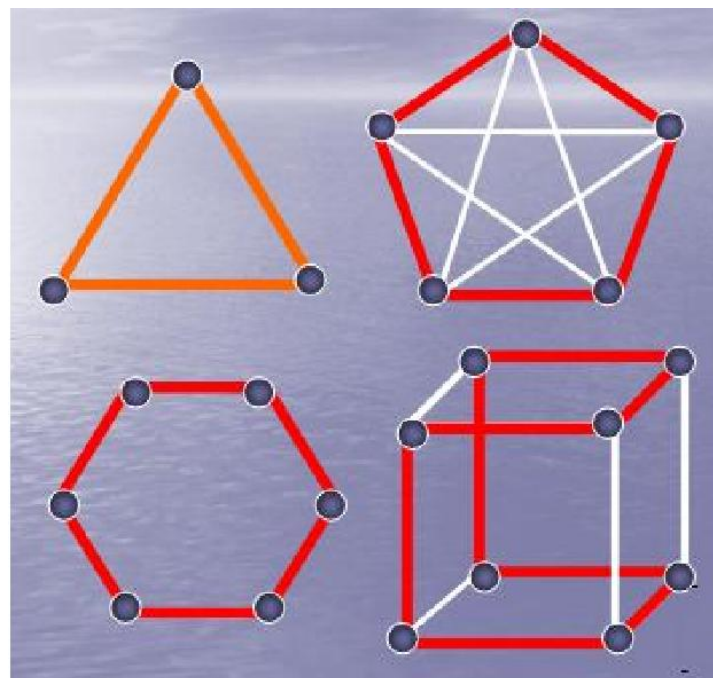
- ❖ Xét G là đồ thị có hướng, liên thông mạnh. Khi đó G là đồ thị Euler nếu và chỉ nếu mọi đỉnh của G đều có bán bậc ra **bằng** bán bậc vào.
- ❖ **Ví dụ 4.8: Xét đồ thị sau:**



Đồ thị G_1



Sir William Rowan Hamilton
(1805-1865)



ĐỒ THỊ HAMILTON

IV.2 Đồ thị Hamilton



Định nghĩa 4.3

❖ Xét đồ thị $G = \langle V, E \rangle$.

- Một đường đi trên đồ thị được gọi là **đường đi Hamilton** nếu nó đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần.
- Một chu trình trên đồ thị được gọi là **chu trình Hamilton** nếu nó đi qua tất cả các đỉnh, mỗi đỉnh một lần.

Ví dụ 4.9: Đồ thị sau có các **đường đi** và **chu trình Hamilton** là:

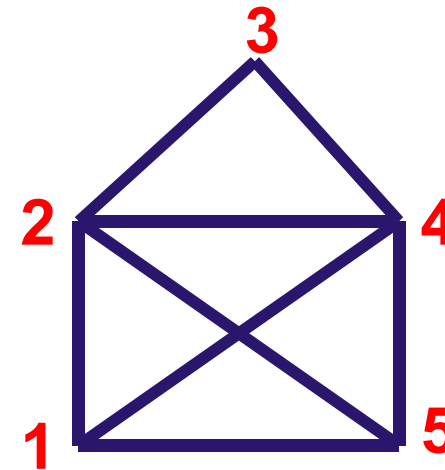
d1: 1 2 3 4 5

d2: 1 5 2 4 3

...

C1: 1 2 3 4 5 1

C2: 2 5 1 4 3 2



IV.2 Đồ thị Hamilton

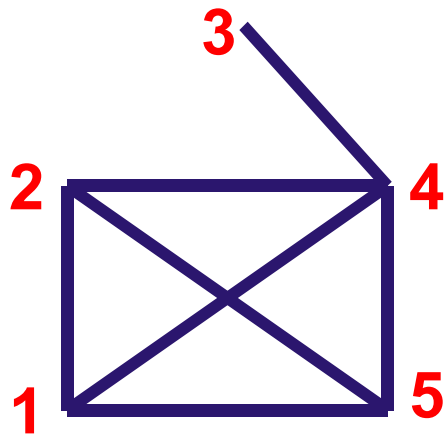


Định nghĩa 4.4

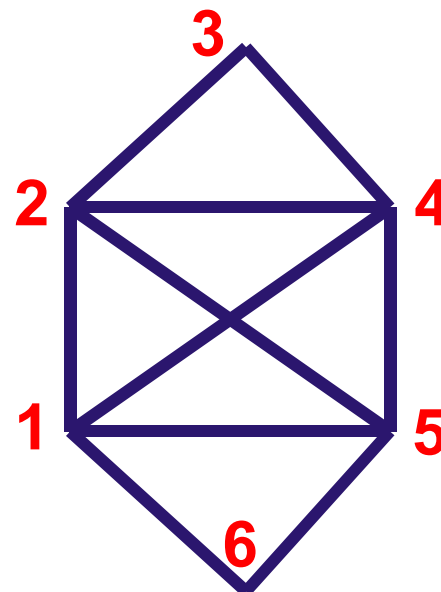
❖ Xét đồ thị $G = \langle V, E \rangle$.

- Đồ thị G được gọi là đồ thị Hamilton nếu và chỉ nếu tồn tại một chu trình Hamilton trong G .
- Đồ thị G được gọi là đồ thị nửa Hamilton nếu và chỉ nếu tồn tại một đường đi Hamilton trong G .

Ví dụ 4.10: Đồ thị nào là đồ thị nửa Hamilton, đồ thị Hamilton ?



Đồ thị nửa Hamilton

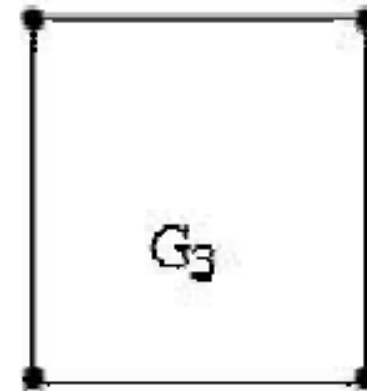
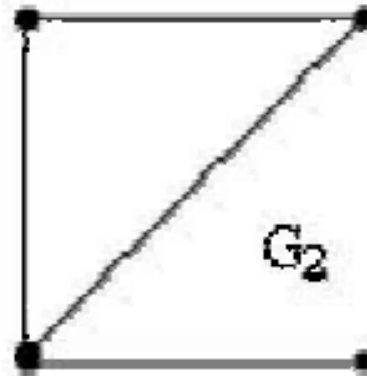
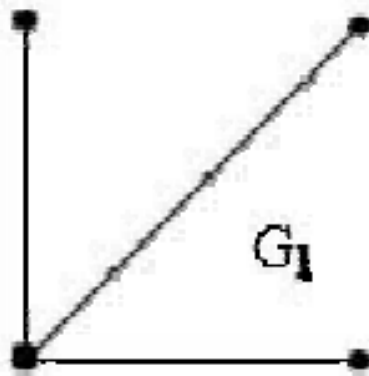


Đồ thị Hamilton
(hiển nhiên
cũng là đồ thị
nửa Hamilton).

IV.2 Đồ thị Hamilton



Xét ví dụ 4.11



G_1 : Đồ thị Không Hamilton

G_2 : Đồ thị nửa Hamilton

G_3 : Đồ thị Hamilton

IV.2 Đồ thị Hamilton



❖ Định lý 4.3 (Dirak 1952).

- Đơn đồ thị **vô hướng** G với $n > 2$ đỉnh, **mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn $n/2$ là đồ thị Hamilton.**

❖ Hệ quả:

- Nếu G là đơn đồ thị có n đỉnh và mọi đỉnh của G đều có bậc không nhỏ hơn $(n-1)/2$ thì G là đồ thị nửa Hamilton.

❖ Định lý 4.4

- Giả sử G là đồ thị **có hướng** liên thông với n đỉnh. Nếu **$\deg^+(v) \geq n/2$, $\deg^-(v) \geq n/2$, $\forall v$** thì G là Hamilton.

IV.2 Đồ thị Hamilton

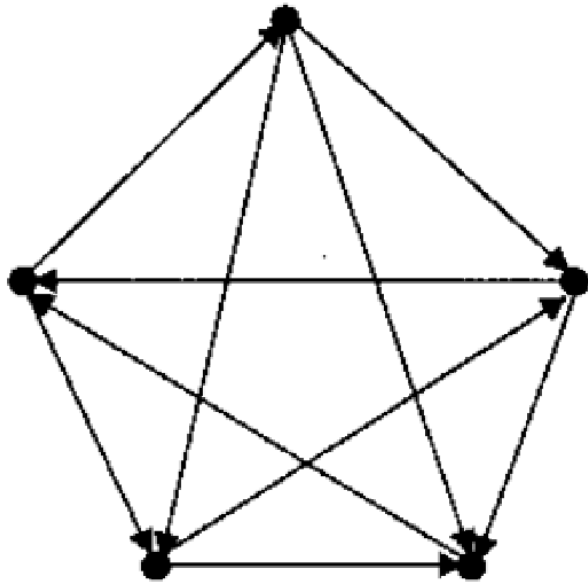


- ❖ **Đồ thị đầy loại:** là đồ thị có hướng mà trong đó hai đỉnh bất kỳ của nó được nối với nhau bởi đúng một cung.
- ❖ Tên đầy loại xuất hiện như vậy vì đồ thị có thể dùng để biểu diễn kết quả thi đấu bóng chuyền, bóng bàn hay bất cứ một trò chơi nào mà không cho phép hoà. Ta có định lý sau:
- ❖ **Định lý 4.5.**
 - Mọi đồ thị đầy loại là nửa Hamilton.
 - Mọi đồ thị đầy loại liên thông mạnh là Hamilton.

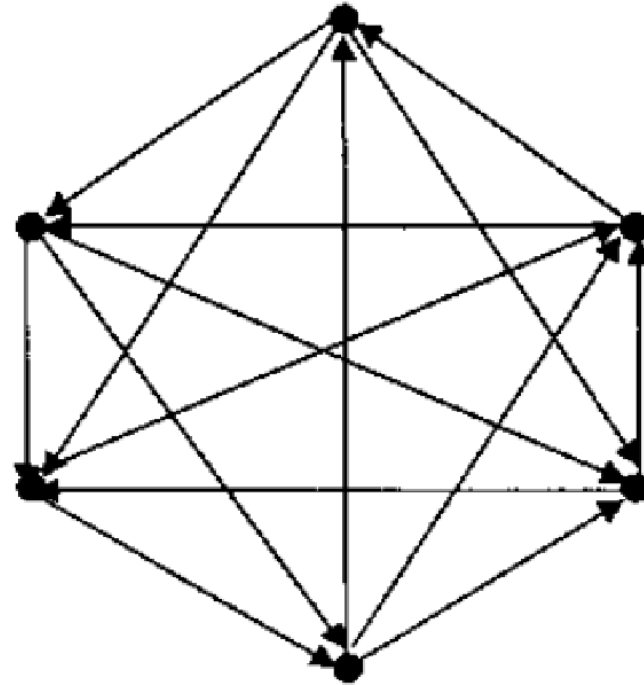
IV.2 Đồ thị Hamilton



Ví dụ 4.12: Xét Đồ thị đầy đủ loại D_5 , D_6 sau



Đồ thị đầy đủ loại D_5



Đồ thị đầy đủ loại liên thông mạnh D_6

IV.2 Đồ thị Hamilton



Thuật toán tìm chu trình Hamilton

- ❖ Để liệt kê chu trình Hamilton và đường đi Hamilton cho tới nay người ta vẫn chưa tìm ra được thuật toán trong trường hợp tổng quát.
- ❖ Chính vì vậy chủ yếu dựa trên thuật toán đệ quy quay lui hoặc dựa trên các quy tắc để xác định chu trình Hamilton (H) của đồ thị.

IV.2 Đồ thị Hamilton

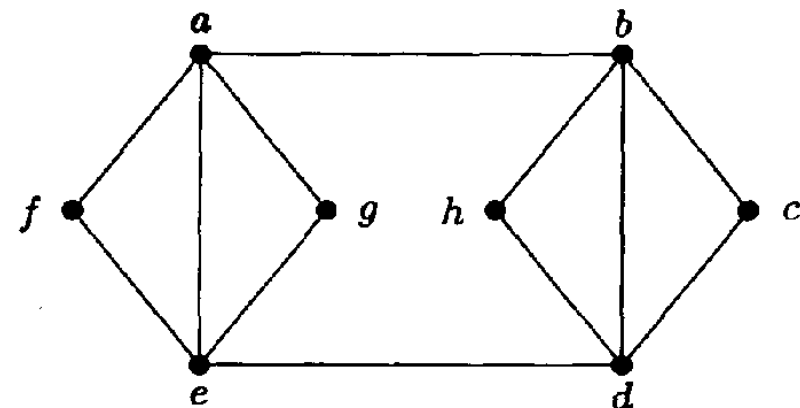


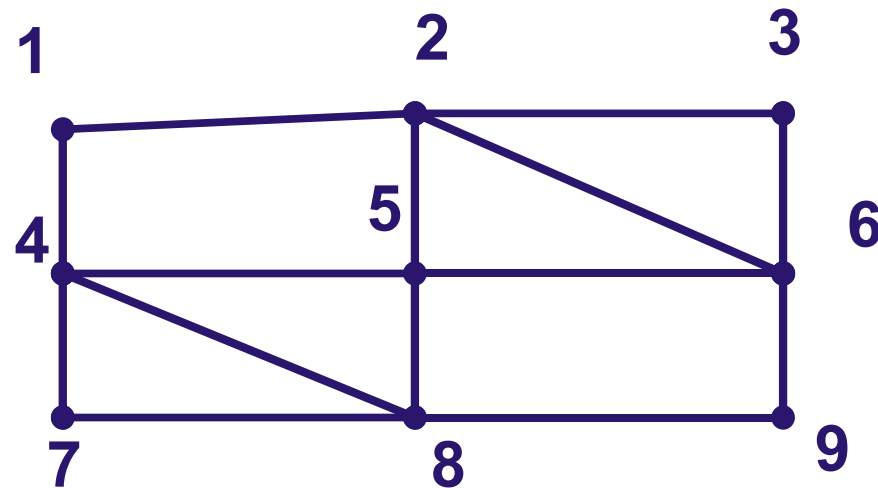
Các quy tắc để xác định chu trình Hamilton của đồ thị:

- ❖ **Quy tắc 1:** Nếu có 1 đỉnh bậc 2 thì hai cạnh của đỉnh này bắt buộc phải nằm trong H
- ❖ **Quy tắc 2:** Không được có chu trình con (độ dài nhỏ hơn n) trong H
- ❖ **Quy tắc 3:** Ứng với một đỉnh nào đó, nếu đã chọn đủ 2 cạnh vào H thì phải loại bỏ tất cả các cạnh còn lại (vì không thể chọn thêm)
- ❖ Không có đỉnh cô lập hoặc đỉnh treo nào khi áp dụng quy tắc 3.

Ví dụ 4.13: theo quy tắc 1, các cạnh fa , fe , ga , ge phải thuộc H .

- Khi đó có chu trình con $agef$ → vi phạm quy tắc 2.
- → đồ thị **không Hamilton**.





IV.2 Đồ thị Hamilton



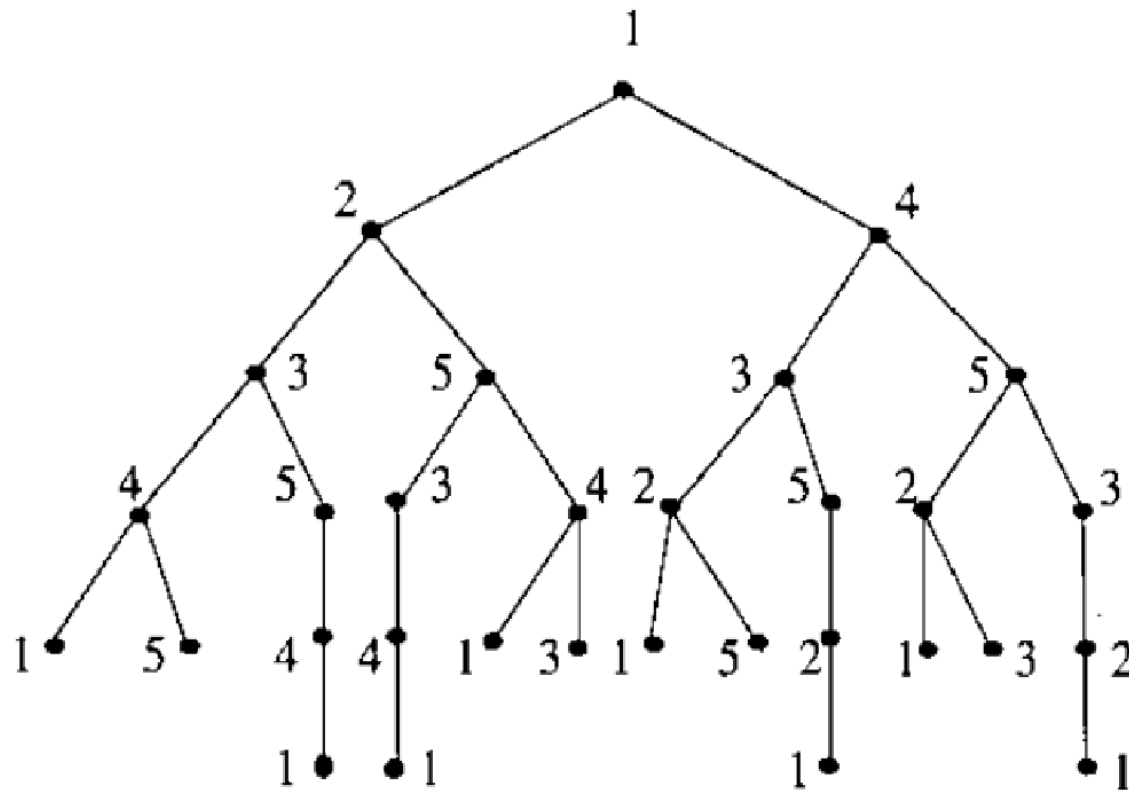
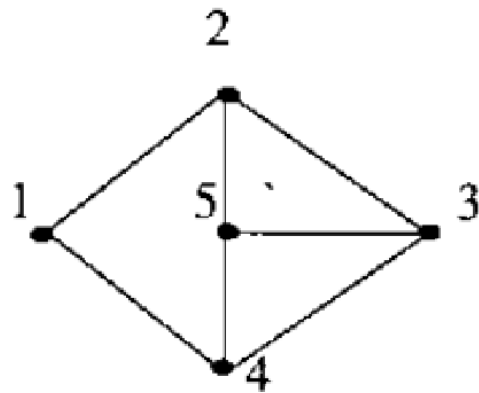
Thuật toán tìm tất cả các chu trình Hamilton?

```
❖ Thuật toán Hamilton( int k) {  
    /*Liệt kê các chu trình Hamilton của đồ thị bằng cách phát  
    triển dãy đỉnh (X[1], X[2], . . ., X[k-1] ) của đồ thị  $G = (V, E)$   
    */  
    for  $y \in Ke(X[k-1])$  {  
        if ( $k == n+1$ ) and ( $y == v_0$ ) then  
            Ghinhan(X[1], X[2], . . ., X[n],  $v_0$ );  
        else {  
             $X[k] = y$ ; chuaxet[y] = false;  
            Hamilton(k+1);  
            chuaxet[y] = true;  
        }  
    }  
}
```

IV.2 Đồ thị Hamilton



Ví dụ 4.15: Mô tả cây liệt kê chu trình Hamilton theo thuật toán quay lui.



IV.3 Bài toán người đưa thư



Giới thiệu bài toán

- ❖ Một nhân viên **đi từ sở bưu điện**, qua một số đường phố để phát thư, rồi **quay về sở**. Người ấy phải đi qua các đường theo trình tự nào để đường đi là ngắn nhất?
- ❖ Bài toán **người đưa thư** được đưa về bài toán **đồ thị** như sau:
 - *Cho đồ thị liên thông G . Một chu trình qua mọi cạnh của G gọi là một hành trình trong G . Trong các hành trình đó, hãy tìm hành trình ngắn nhất (tức là qua ít cạnh nhất).*

IV.3 Bài toán người đưa thư



Xét đồ thị trong hai trường hợp sau:

- ❖ **Trường hợp 1:** Mọi đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn, G là đồ thị Euler thì chu trình Euler trong G (qua mỗi cạnh của G đúng một lần) là **hành trình ngắn nhất cần tìm**.
- ❖ **Trường hợp 2:** G có một số đỉnh bậc lẻ (số đỉnh bậc lẻ là một số chẵn). Khi đó, mọi hành trình trong G phải đi qua ít nhất hai lần một số cạnh nào đó.
- ❖ Ta quy ước xem mỗi hành trình T trong G là một hành trình trong đồ thị Euler G_T , có được từ G bằng cách vẽ thêm một cạnh song song đối với những cạnh mà T đi qua hai lần. Bài toán đặt ra được đưa về bài toán sau:
- ❖ Trong các đồ thị Euler G_T , tìm đồ thị có số cạnh ít nhất (khi đó chu trình Euler trong đồ thị này là hành trình ngắn nhất).

IV.3 Bài toán người đưa thư



Định lý 4.6

- ❖ **Định lý (Goodman và Hedetniemi, 1973).** Nếu G là một đồ thị liên thông có q cạnh thì hành trình ngắn nhất trong G có chiều dài

$$q + m(G),$$

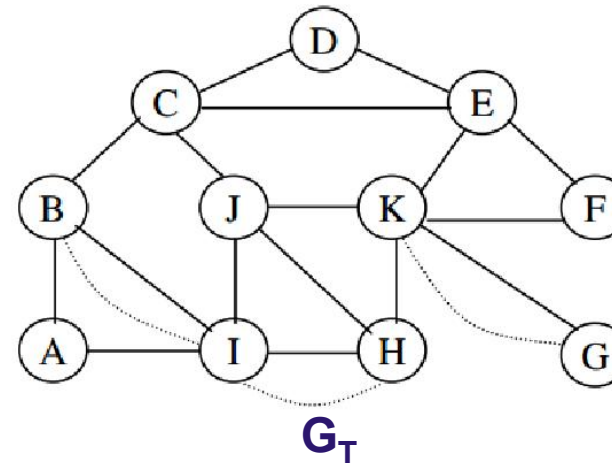
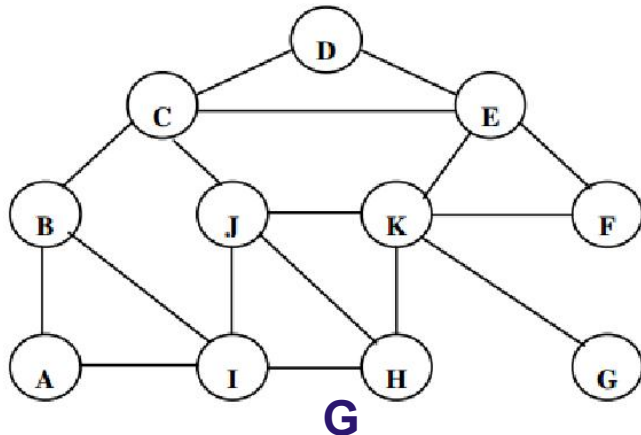
- ❖ trong đó $m(G)$ là số cạnh mà hành trình đi qua hai lần và được xác định như sau:
 - Gọi $V_0(G)$ là tập hợp các đỉnh bậc lẻ ($2k$ đỉnh) của G . Ta phân $2k$ phần tử của G thành k cặp, mỗi tập hợp k cặp gọi là một phân hoạch cặp của $V_0(G)$.
 - Ta gọi độ dài đường đi ngắn nhất từ u đến v là khoảng cách $d(u,v)$. Đối với mọi phân hoạch cặp P_i , ta tính khoảng cách giữa hai đỉnh trong từng cặp, rồi tính tổng $d(P_i)$. Số $m(G)$ bằng cực tiểu của các $d(P_i)$:

$$m(G) = \min d(P_i).$$

IV.3 Bài toán người đưa thư



Ví dụ 4.16: Giải bài toán người đưa thư cho trong đồ thị sau:



- ❖ Tập hợp các đỉnh bậc lẻ $V_0(G) = \{B, G, H, K\}$ và tập hợp các phân hoạch cặp là $P = \{P_1, P_2, P_3\}$, trong đó
 - $P_1 = \{(B, G), (H, K)\} \rightarrow d(P_1) = d(B, G) + d(H, K) = 4 + 1 = 5,$
 - $P_2 = \{(B, H), (G, K)\} \rightarrow d(P_2) = d(B, H) + d(G, K) = 2 + 1 = 3,$
 - $P_3 = \{(B, K), (G, H)\} \rightarrow d(P_3) = d(B, K) + d(G, H) = 3 + 2 = 5.$
 - $m(G) = \min(d(P_1), d(P_2), d(P_3)) = 3.$
- ❖ Do đó G_T có được từ G bằng cách thêm vào 3 cạnh: $(B, I), (I, H), (G, K)$ và G_T là đồ thị Euler.
- ❖ **KQ:** **A, B, C, D, E, F, K, G, K, E, C, J, K, H, J, I, H, I, B, I, A.**

IV.4 Bài toán người du lịch



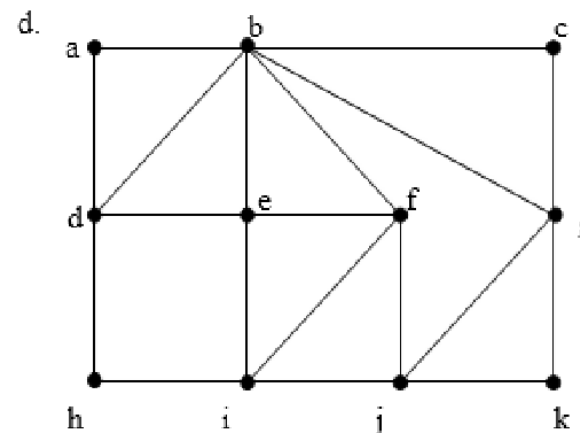
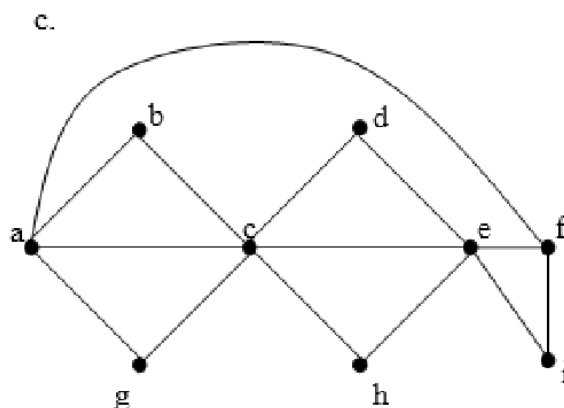
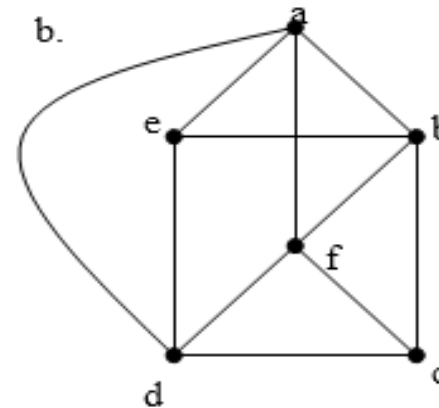
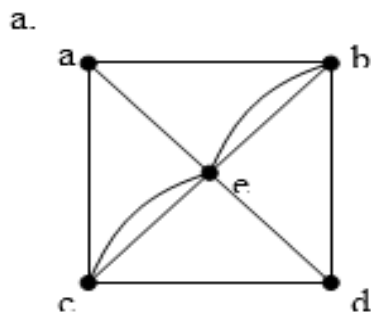
Giới thiệu bài toán

- ❖ Một người xuất phát từ một thành phố nào đó muốn tới thăm $n-1$ thành phố khác, mỗi thành phố đúng một lần, rồi quay về thành phố ban đầu. Hỏi nên đi theo trình tự nào để độ dài tổng cộng các đoạn đường đi qua là ngắn nhất (khoảng cách giữa hai thành phố có thể hiểu là cự ly thông thường hoặc thời gian cần đi hoặc chi phí của hành trình, ... và xem như cho trước).
- ❖ Xét đồ thị đầy đủ $G=(V,E)$, với $V=\{1, 2, \dots, n\}$, có trọng số với trọng số $m_{ij}=m(i,j)$ có thể khác $m_{ji}=m(j,i)$. Như vậy, ta có thể xem G như là một đồ thị có hướng đầy đủ "mạnh" theo nghĩa với mọi $i, j=1, 2, \dots, n, i \neq j$, luôn có $(i,j), (j,i) \in E$. Bài toán trở thành tìm chu trình Hamilton có độ dài ngắn nhất trong G .

IV.5 Bài tập



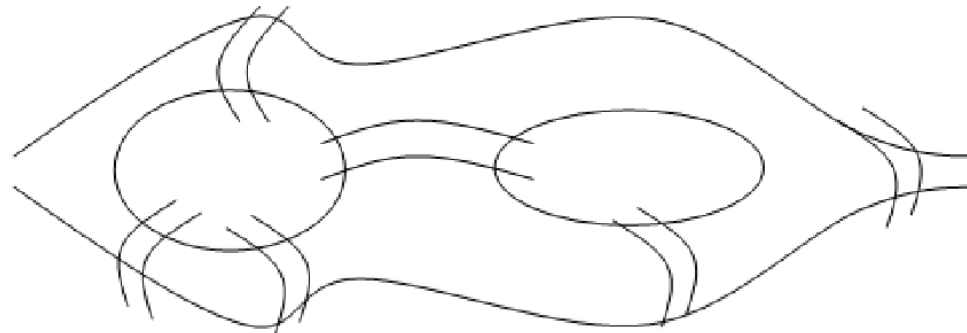
Bài 01. Các đồ thị sau có chu trình Euler, đường đi Euler hay không? Nếu có hãy xây dựng chu trình, đường đi đó.



IV.5 Bài tập



Bài 02. Một người nào đó có thể đi qua những chiếc cầu như trên hình vẽ sau, mỗi chiếc cầu đi qua đúng 1 lần và lại trở về nơi xuất phát được không?.



Bài 03. Với giá trị nào của n các đồ thị sau đây có chu trình Euler ?

a. K_n , b. C_n , c. W_n ,

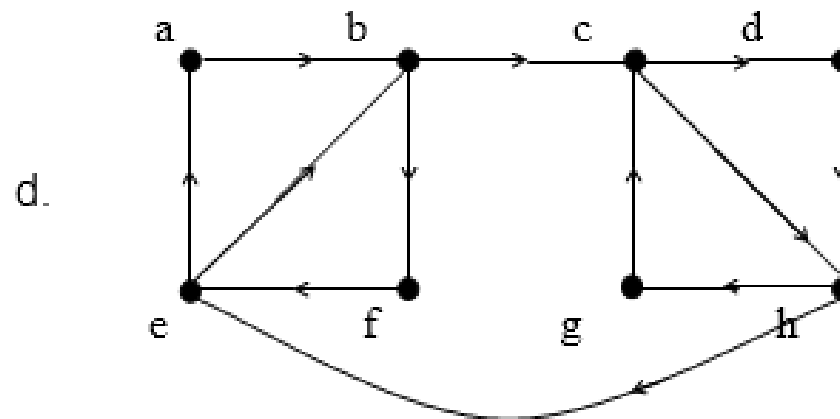
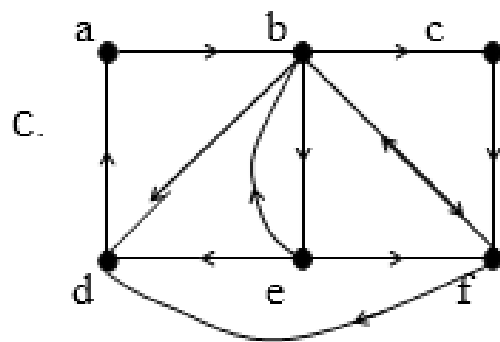
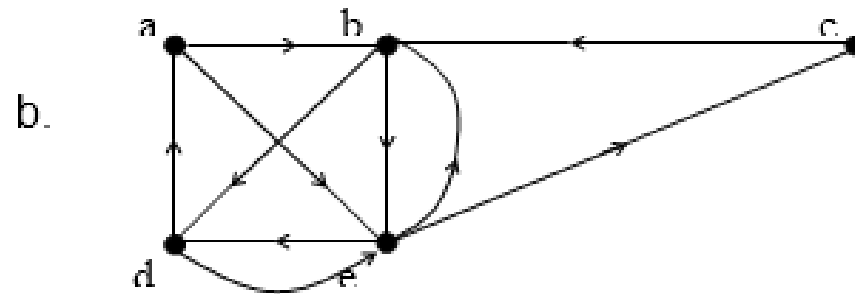
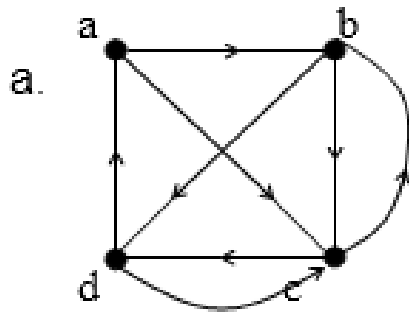
Bài 04. Với giá trị nào của m và n các đồ thị hai phía đầy đủ $K_{m,n}$ có:

a. chu trình Euler ? B. đường đi Euler ?

IV.5 Bài tập



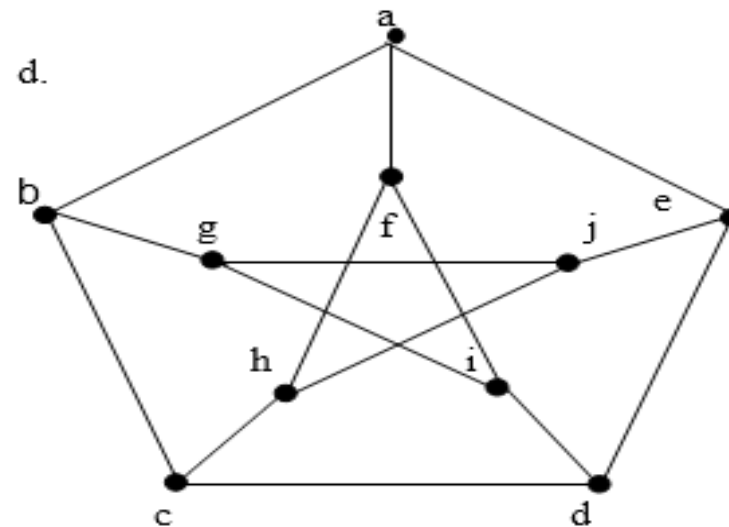
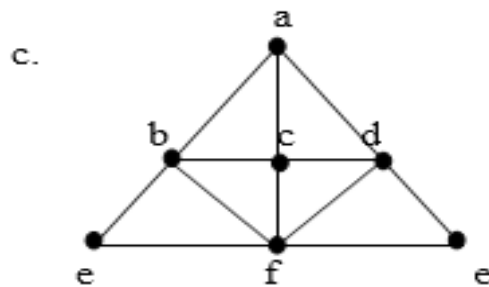
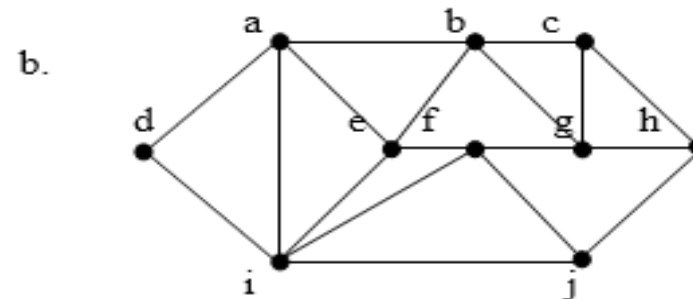
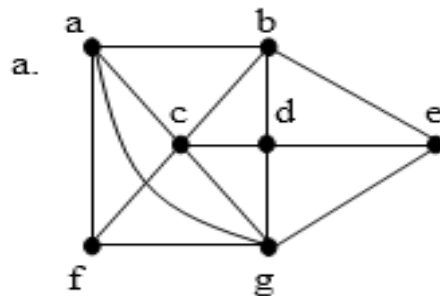
Bài 05. Xem xét các đồ thị có hướng sau, có chu trình hay đường đi Euler hay không? Nếu có, hãy xây dựng chu trình và đường đi đó.



IV.5 Bài tập



Bài 06. Tìm các chu trình Hamilton hoặc đường đi Hamilton của các đồ thị sau:



Đồ thị Petersen

IV.5 Bài tập



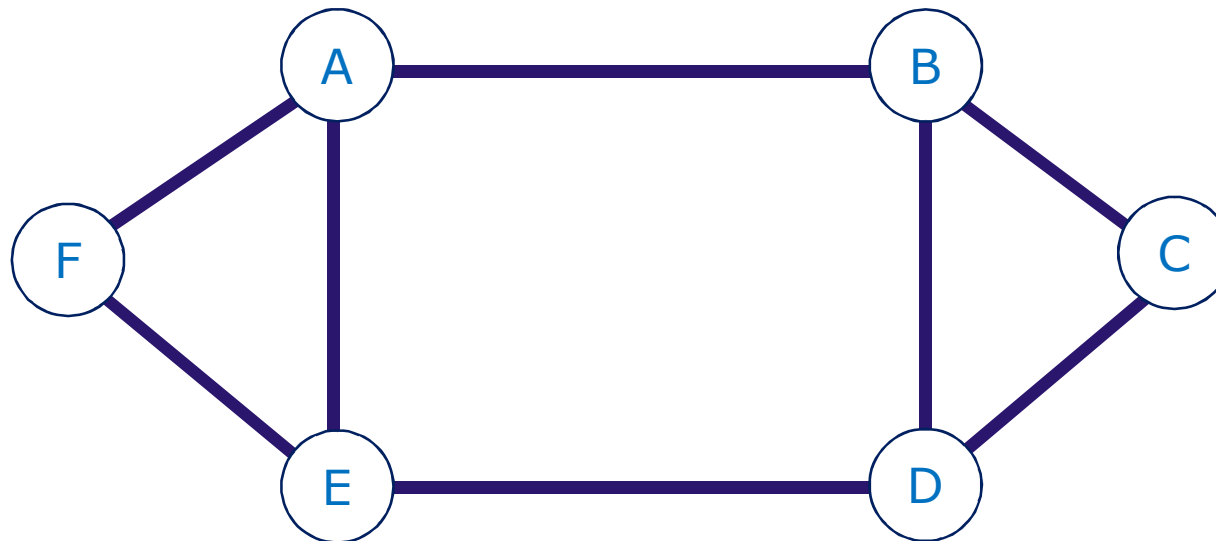
Bài 07. Cho ví dụ về:

- a. Đồ thị có một chu trình vừa là chu trình Euler vừa là chu trình Hamilton.
- b. Đồ thị có một chu trình Euler và một chu trình Hamilton nhưng hai chu trình này không trùng nhau.
- c. Đồ thị có chu trình Euler nhưng không có chu trình Hamilton.
- d. Đồ thị có chu trình Hamilton nhưng không có chu trình Euler.

IV.5 Bài tập



Bài 08. Cho đồ thị G như hình vẽ. sử dụng định lý **Goodman và Hedetniemi** để tìm hành trình ngắn nhất trong G .



Q & A?